セルラー・オートマトンに関する基礎的研究

著者	荒木 哲郎
号	523
発行年	1975
URL	http://hdl.handle.net/10097/9259

氏　　　　名	荒木哲郎（あらき てつお）
授与学位	工学博士
学位授与年月日	昭和51年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 電気及通信工学専攻（博士課程）
学位論文題目	**セルラー・オートマトンに関する基礎的研究**
指導教官	東北大学教授　野口　正一
論文審査委員	東北大学教授　野口　正一　東北大学教授　大泉　充郎 東北大学教授　本多　波雄　東北大学教授　木村　正行

論文内容要旨

第1章　序　論

離散的な系で起きている事象を抽象的に扱うオートマトン理論が神経回路網理論および計算の理論という2つの流れに関連して生まれ，1950年代に確立された。同じ頃 von Neumann によって自己増殖するオートマトンのモデルが提案され，セルラー・オートマトンと呼ばれる研究が始められた。これは抽象的なオートマトン理論の一分野として，また計算機科学や生物学等の関連において以後広範囲にわたり研究が進められてきた。ここでセルラー・オートマトンは，同一構造をもったセルと呼ばれる有限オートマトンを規則的に配列し，それらを一様な方法で結合した系である。またこのようなセルラー・オートマトンでは系の動作および機能を，その構造との関連において調べることが基本的な問題となっている。そこで本研究でもこの観点に立ち，系の性質を特に代数的な立場から論じている。おもにオートマトンの同形写像の概念と全単射な関数の概

念を中心に，前半部ではセルラー・オートマトンの類別問題を考察し，また後半部では，系の振舞いが全単射な関数によって表わされるセルラー・オートマトンについて，その解析を行っている。

第2章　セルラー・オートマトンとその結合グラフ

セルラー・オートマトンは一口で言えば，多数の同一構造を持ったセルと呼ばれる有限オートマトンを規則的に結合して得られる系である。セルの配列が一次元であるものや，二次元あるいはそれ以上のもの，また系が有限個のセルからなるものや無限個のセルからなるものなど実際に扱う問題によって具体的なモデルが異なってくる。本研究では，オートマトンの代数的な性質をセル構造（セル間の相互結合構造）との関係において調べることが目的であり，特にJumpの用いた群グラフの概念により記述される系について考察している。

2.2では，セルラー・オートマトンの一般的な定義を与え，その下で特に群グラフ構造で記述されるセルラー・オートマトンを定義している。

2.3では，セル間の結合状態を表わすグラフの性質を，ラベル数，入（出）次数，入（出）線数の関係から論じ，特に従来より知られているところの規則的グラフ（正則グラフ，点対称グラフ，群グラフ等）と，ここで与えられた各種の結合グラフとの包含関係を調べ，本研究で対象としている群グラフの構造面から位置づけを与えている。

第3章　セルラー・オートマトンの構造を保存する同形写像とその類別

セルラー・オートマトンは，その構造の一様性のためにいろいろな特徴ある動特性を持っている。従ってその特徴を調べる為には，まず構造の一様性を数学的にきちんとした形で与え，何らかの形で両者を結びつけることが必要である。ここでは，このようなセルの一様構造が群グラフで規定されたセルラー・オートマトンの同形理論を用いて，そのオートマトンの類別を行う。

従来オートマトン理論においては，オートマトンの同形写像が一つの基本的な代数量となっており，またこの下で同形なオートマトンに類別したときの同値類の個数を調べることが，組合せ論において，一つの重要な仕事となっている。

3.2では，群グラフの同形性に関して従来のグラフ同形より厳しい群グラフ同形の概念を与える。これはセル構造を保存するような写像である。このような群グラフ同形写像（あるいは群グラフ自己同形写像）が，セルの接続集合を保存するような群の同形写像（あるいは自己同形写像）と左移動作用素の積で与えられることが示される。

3.3では，この群グラフ同形の概念を用いて，オートマトンの一般的なstructural homoを定義し，さらに群グラフ自己同形を用いてstructural isoの概念を与えている。この下で，一定のセル構造で実現できるオートマトンの同形性を議論する。このとき，群グラフ上で定義され

る２状態オートマトンの類別定理が与えられ，セルの接続集合を保存するような群グラフ自己同形の集合Ａと双対な関数を与える状態上の作用素Ｃの直積が，オートマトンのstructural isoによる類別を与えている。

本章の目的は，このＡ×Ｃを具体的に求め，類別された同値類の個数を求めることにある。またセルラー・オートマトンの局所関数と全域関数は一対一に対応しているので，局所関数を類別することと，全域関数すなわちセルラー・オートマトンを類別することは等価になる。そこでオートマトンの類別を，その局所関数の類別に置きかえて議論することができる。

次にこのときの同値類の個数を求めていく。反双対な作用素$\overline{C}$とし，Ａと$\overline{C}$で局所関数を分割するものを，Ｓ一分割と呼ぶことにすれば，自己双対関数と自己反双対関数が同数だけ存在することから，局所関数のＡ×Ｃによる分割の個数とＳ一分割の個数は等しくなるという結果を得る。類別の簡便さより，Ｓ一分割を用いることができ，その同値類の個数がポリヤの定理を用いて求められる。またＡによる群グラフの類別に対しても同様な議論ができ，局所関数および群グラフの数え上げの手順が次のように与えられる。

①群グラフにおいて，接続集合を保存するような群の自己同形の全体Ａを求める。

②Ａのサイクル・インデックス$Z_A(x_1, \cdots x_K)$を求め，各変数x_iに２を代入することにより，群グラフの同値類の数が求まる。

③Ａ×$\overline{C}$の置換表現Ｓ＝Ｌ×Ｐを求める。

④Ｓのサイクル構造より，$Z_S(x_1, \cdots x_{2^K-1})$を求める。

⑤$Z_S(x_1, \cdots, x_{2^K-1})$の各変数に２を代入すると，Ｓの下で類別された局所関数の同値類の数が求まる。

この手順に従い，3.5では実際に一次元および二次元の基本的な配列（三角形，六角形，格子状)について，有限および無限配列の場合の同値類の個数を求めている。これらの数は各配列におけるオートマトンの一つの特徴を示す量となっている。またこの結果が有限と無限の場合で異なっているが，それは境界条件等の制約で自己同形写像が制限されているからである。

第４章　最大近傍を持つ有限セルラー・オートマトンの状態遷移構造

群グラフ上で定義されるセルラー・オートマトンの中で，特にセルの個数が有限であるようなセルラー・オートマトンの機能，振舞いは，各セルで定義される局所的な機能の他に，セルの数や境界条件によってさまざまに変化する。このことは系の解析に当って，統一的な見解，手法を与えることが，一般に難しく各々の場合に個別な取り扱いを必要としている。特にここでは，系の機能が全単射な関数として表わされる場合の局所関数の形を表現することに主眼をおき議論する。なお取り扱いを簡単にする為，各セルが全セルと結合関係をもつ場合を考え，また２状態

の場合に限り議論する。

4.2では，最大近傍を有する系の全域関数の性質について議論する。まず，系の様相集合（全セルの状態配列で，全域関数の定義域および値域となるもの）が，互いに近傍様相（各セルの近傍系に対する状態配列）となる関係の下で類別され，各同値類を特徴づける不変群の概念が与えられる。このときセルラー・オートマトンの全域関数に対し，一般に次の性質が成り立つことが示される。

①全域関数による様相の可能な遷移は，同値類間で決定され，写される方の同値類に対する不変群が，写す方の同値類に対する不変群の部分集合になる。

②このときの局所関数は各同値類別に一意的に定まる。

ここで，近傍様相の集合（局所関数の定義域に当る）は様相集合に一致していることに注意する。

次に同値類に現われる不変群について考察しており，一つの同値類に現われる異なる不変群の数および，同じ不変群をもつ様相の個数を求めている。特に可換群の場合には，各同値類に現われる不変群は唯一つであり，また巡回群の場合には，不変群の包含関係は同値類に含まれる様相数の約数関係に置きかわる。

さらに遷移可能な同値類間で，Fの単射性を保存する為の必要十分条件を，巡回群，可換群，一般の有限群に対して求めている。

この条件をもとに4.3では，全単射な全域関数を定める局所関数の形を議論している。これはここで新たに与えた写像（α，β，γ）の概念により完全に決定される。位数8の可換群の場合を例に取り，この様子を説明している。またこのような局所関数を求める手順を（α，β，γ）の構成において必要な量を中心に与えている。

4.4では，前の議論をもとに，全単射な全域関数に関する諸性質について考察する。まず群の正則表現に対するサイクル・インデックスを求め，3章と同様にして様相集合の同値類の数を導く。特に全単射な全域関数を決定するのに必要な，不変群の等しい同値類の数について検討している。巡回群の場合には，様相数が等しい同値類の数となるが，これは円順列の考え方を用いることにより，直接求められる。これらの議論から，全単射な全域関数をもつセルラー・オートマトンの総数が求まることになる。また写像（α，β，γ）の性質から，このようなセルラー・オートマトンの集合は群になることが導かれる。さらに全単射な全域関数が示すサイクル長および最大サイクル長について考察し，各系が定める解の形を与えている。特に最大サイクル長が 2^n-2 となるのは，素数位数の巡回群の場合に限ることが示される。

このように系が最大近傍をもつ場合には，有限群論の手法を用いることにより，系の性質を把握できる。また，この中にはそれ以下の近傍数をもつ系も見かけ上含まれており，その意味では系で実現される最大の性質が議論できるが，その性質を与えている系の形を判定するのは一般に難

しい。これに対しては何らかの新しい手法が必要となってくる。

第5章　結　　　論

本論文の結論を述べている。

審査結果の要旨

セルラー・オートマトンは同一の性質を有する有限オートマトンを空間に規則的に配列し，各オートマトンを一様に結合した系である。このような系は情報処理の立場から考えると，情報の並列処理やパターン情報の処理等をきわめて効果的に処理することができる計算機システムのモデルである。それゆえ，このような系の基本的性質を十分に研究することは今後の新しい並列情報処理方式やパターン情報処理方式の開発のために不可欠なものとなる。著者はこの点に着目し，セルラー・オートマトンの性質を代数理論を用いて研究し，特に群グラフにより表現されるセルラー・オートマトンの類別問題と本システムの静的，動的な性質について統一的な結果を導いた。本論文はこれらの成果をまとめたもので全編5章よりなる

第1章は序論であり，本論文の立場と目的について述べている。

第2章では本論文で対象としているセルラー・オートマトンの数学的モデルについて説明し，セル間の結合状態を表わすグラフの性質を用いてセルラー・オートマトンの能力の包含関係について論じている。

第3章はセル間の結合が群グラフによって規定されるセルラー・オートマトンの類別問題を統一的に研究したものである。著者はオートマトンとグラフの同型写像を結びつけて考察するためセル間の近傍構造を保存する群グラフ同型の概念を導き，オートマトンの一般的な構造保存の準同型写像を与えこれを用いて2状態セルラー・オートマトンの類別定理を与えている。この結果，局所関数の同値類の数を正確に求める方法が与えられ，特に一次元，二次元の基本的配列に対して詳細な議論が行われている。これらは優れた研究成果である。

第4章は結合が有限な群グラフで規定されるセルラー・オートマトンの全単射な性質とこれによる系の動的性質について詳細に研究したものである。まず著者は全域関数と局所関数の関係を系の様相を不変に保つ不変群の概念を用いて明らかにし，この結果を用いて全域関数が全単射となるための基本的な性質を求めている。また，この性質からセルラー・オートマトンの基本的な動的性質である系のもつ周期の長さ，最大周期長の性質が導かれ，特にセルの個数nが素の場合最大周期長は2^n-2であることが示された。これらは重要な知見である。

第5章は結論である。

以上要するに本論文は，将来の情報処理方式の基礎となるセルラー・オートマトンの基本的性質を代数理論の上から論じ，系の類別問題および系の静的，動的性質を統一的な立場から明らかにしたもので情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。